

Mercredi 27 janvier 2021

Manipuler, verbaliser, abstraire temps 1

Céline HEDONT CATTEAU

Manipuler, verbaliser, abstraire

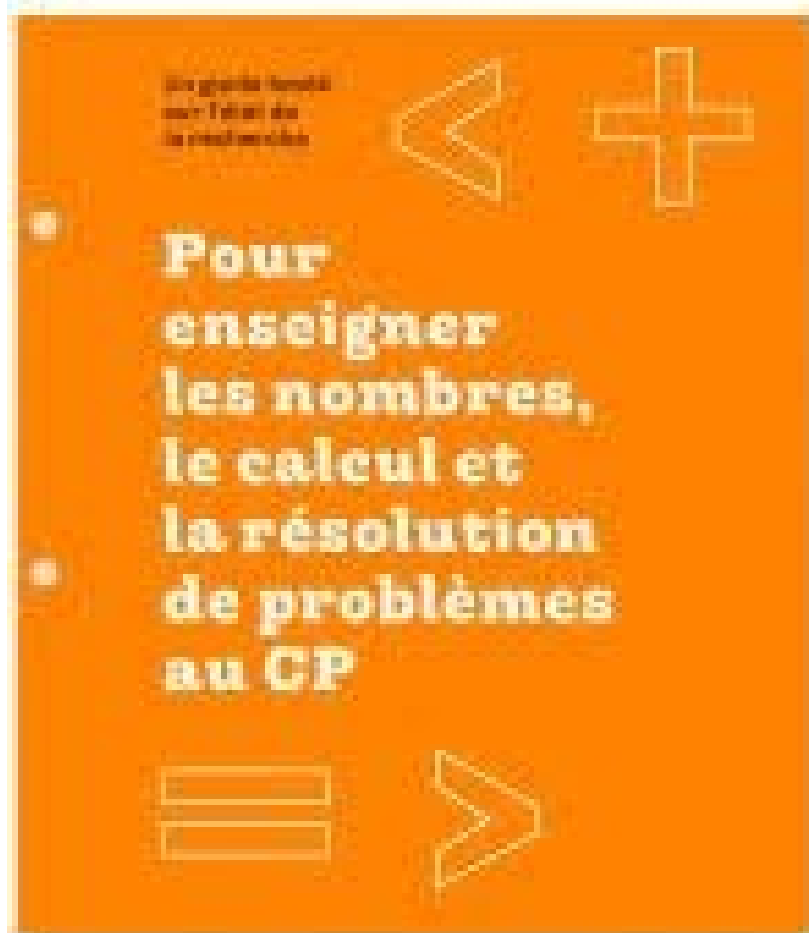
Plan du Parcours

- Temps 1 : le 27 janvier de 10h à 12h
- Temps 2 : en autonomie
- Temps 3 : le lundi 29 mars de 17h à 19h

Contenu et déroulement du temps 1

- De la manipulation à la représentation symbolique en passant par la verbalisation.
- Modéliser pour résoudre des problèmes : les schémas en barre.
- La schématisation en barre : comment la mettre en œuvre ?

Résolution de problèmes et modélisation



Modélisation et résolution de problèmes

- Trois types de problèmes.
- Les fondamentaux de la démarche d'enseignement de la résolution de problèmes: Manipuler, verbaliser, abstraire.
- Problèmes arithmétiques : la modélisation pour aider à résoudre les problèmes.
- Schématisation en barre : un exemple avec le problème parties-tout.
- L'importance d'un continuum didactique cycle 2 et cycle 3.

Trois types de problèmes

- Existence de nombreuses catégorisations.
- Recherches en didactique de Catherine Houdement : une catégorisation simple en trois types de problèmes :
 - Les problèmes basiques ou élémentaires
 - Les problèmes complexes
 - Les problèmes atypiques

Trois types de problèmes

- Les problèmes basiques ou élémentaires
 - Problèmes à une ou deux données où il s'agit d'en déterminer une troisième.
 - Syntaxe simple, sans information superflue, contexte facile à comprendre.
 - Problèmes arithmétiques à une étape.

Il y a 36 oiseaux dans l'arbre, 21 oiseaux s'envolent. Combien en reste-t-il ?

Trois types de problèmes

- Les problèmes complexes

- Combinaison de plusieurs problèmes basiques.
- Identification nécessaire des problèmes basiques sous-jacents.

Dans la bibliothèque de la classe, il y a 84 livres. Il y a 35 albums de jeunesse et 21 bandes dessinées. Les autres sont des livres documentaires. Combien y a-t-il de livres documentaires ?

Trois types de problèmes

- Les problèmes atypiques

- Problèmes pour apprendre à chercher.
- Problèmes dont la stratégie de résolution n'est pas directement identifiable.

On veut habiller des clowns avec des costumes constitués d'un chapeau et d'un pantalon. Les chapeaux peuvent être rouge, jaune ou vert. Les pantalons peuvent être bleu, orange, marron ou noir. Combien de costumes peut-on constituer ?

Trois types de problèmes

Points de vigilance

- Frontières entre ces trois types de problèmes évoluent au fil de la scolarité des élèves.
- Un problème de partage atypique au CP peut devenir basique au CE2.
- Un problème complexe peut devenir basique quand l'élève sait le résoudre en sautant implicitement des étapes.

Les fondamentaux de la démarche d'enseignement de la résolution de problèmes

• L'abstraction

- Capacité à pouvoir se détacher du réel, du contexte dans lequel on a manipulé et/ou représenté.

- Trois étapes successives pour atteindre l'abstraction : **la manipulation, la représentation et la verbalisation.**

La manipulation

- Agir sur des objets tangibles.
- Une étape intermédiaire pour aller vers la représentation.
- Le rôle de la manipulation évolue :
 - Matériel pour constater pour observer.
 - Matériel pour valider ce que l'on a anticipé.
- Distinction entre **la manipulation passive** et **la manipulation active.**

MANIPULATION PASSIVE ET MANIPULATION ACTIVE :

EXEMPLE AVEC LA SITUATION DE LA BOÎTE³⁷

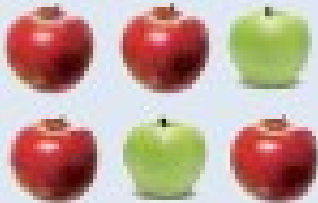
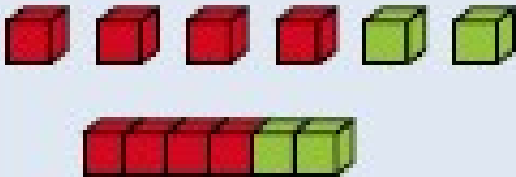
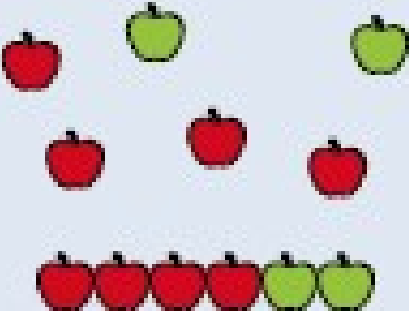


Manipulation passive : le professeur dispose **A** jetons dans la boîte, puis **B** jetons et pose la question du nombre total de jetons dans la boîte. Les élèves ont accès au contenu de la boîte et peuvent se contenter de lire le résultat en recomptant les jetons.

Manipulation active : le professeur montre successivement les deux collections de jetons et les place dans la boîte, la referme et pose la question. Dans ce cas, l'élève va mobiliser des représentations mentales et ses connaissances sur les nombres, ainsi que des procédures de plus haut niveau pour résoudre le problème.

De la manipulation à la représentation symbolique

- Représenter une situation par une image, un dessin, une photo, un schéma.
- L'action est transformée en image mentale.
- Evolution des représentations : de la représentation des objets tangibles à des représentations plus abstraites comme les schémas ou l'écriture mathématique.
- Progressivité des représentations.

«Au supermarché, j'ai acheté 4 pommes rouges et 2 pommes vertes. Combien ai-je de pommes dans mon panier?»

<p>MODE SENSORI-MOTEUR³⁸</p>	<p>Manipulation d'objets tangibles proches de la réalité :</p> 	<p>Manipulation d'objets tangibles figuratifs :</p> 
<p>MODE IMAGÉ</p>	<p>Représentations imagées des objets tangibles proches de la réalité :</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • Représentation avec un schéma :  • Représentation présymbolique (schéma en barres + écriture symbolique) : 
<p>MODE SYMBOLIQUE</p>	<p>Écriture en langage mathématique : $4 + 2 = 6$</p>	

De la manipulation à la représentation symbolique

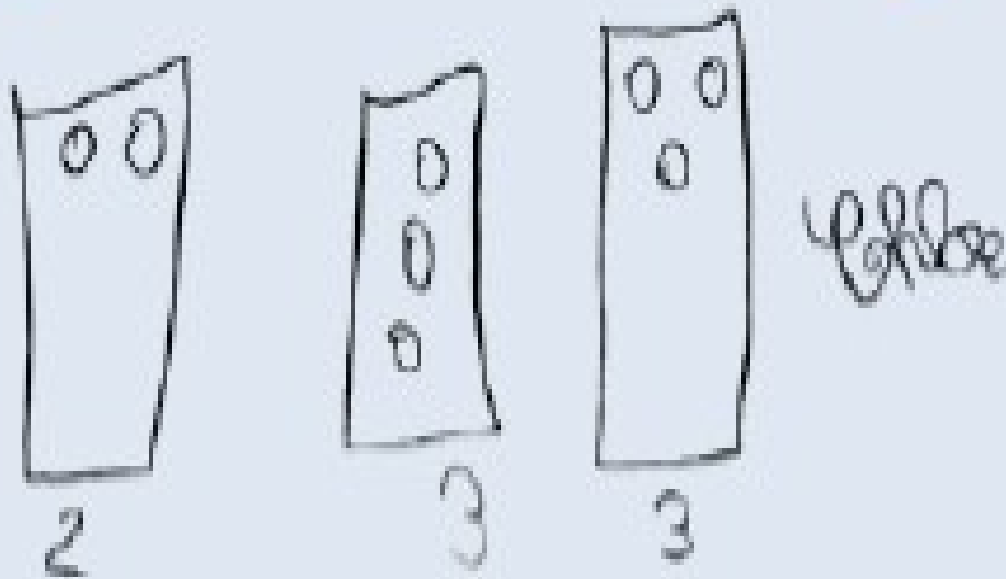
- Le matériel tangible proche de la réalité est privilégié à la maternelle.
- Il pourra être repris en début de cycle 2.
- Il est progressivement remplacé par des objets manipulables moins figuratifs comme des cubes emboîtables.

EXEMPLE DE SCÉNARIO CLASSIQUE EN GRANDE SECTION

Énoncé oral du problème : « Vous répartissez 8 marrons dans 3 assiettes. »

Phase 1 : la manipulation avec des marrons permet l'appropriation du problème et de faire des essais.

Phase 2 : les élèves dessinent la situation de manières très variées allant de dessins figuratifs à des ébauches de schémas (cf. figure 20).



Phase 3 : après rappel de l'activité précédente, les élèves doivent proposer sans matériel une autre répartition sur leur feuille. La vérification pourra se faire à l'aide du matériel, accompagnée d'une formulation orale.

La place de la verbalisation dans l'accès à l'abstraction

- La **verbalisation** est essentielle lors des phases de manipulation et de représentation pour expliciter l'action.
- La verbalisation de l'enseignant :
 - Faire des analogies avec des problèmes déjà rencontrés.
 - Reformuler dans un langage mathématique précis les productions des élèves.
 - Verbaliser ses procédures afin que les élèves soient capables de verbaliser leurs procédures.

La place de la verbalisation dans l'accès à l'abstraction

La verbalisation de l'élève

- Elle lui permet :
 - d'effectuer un retour réflexif sur ses stratégies et d'en prendre conscience.
 - de préciser son argumentation.
 - de comparer ses stratégies à celles de ses camarades.
- Elle permet au professeur de proposer un étayage adapté.

Faire évoluer les procédures des élèves

Trois types de stratégies sont codifiées

- Stratégie 1 : dénombrement élémentaire.
- Stratégie 2 : dénombrement s'appuyant sur des représentations symboliques des collections.
- Stratégie 3 : stratégie de calcul ou proche du calcul, plus ou moins explicitée ou formalisée.

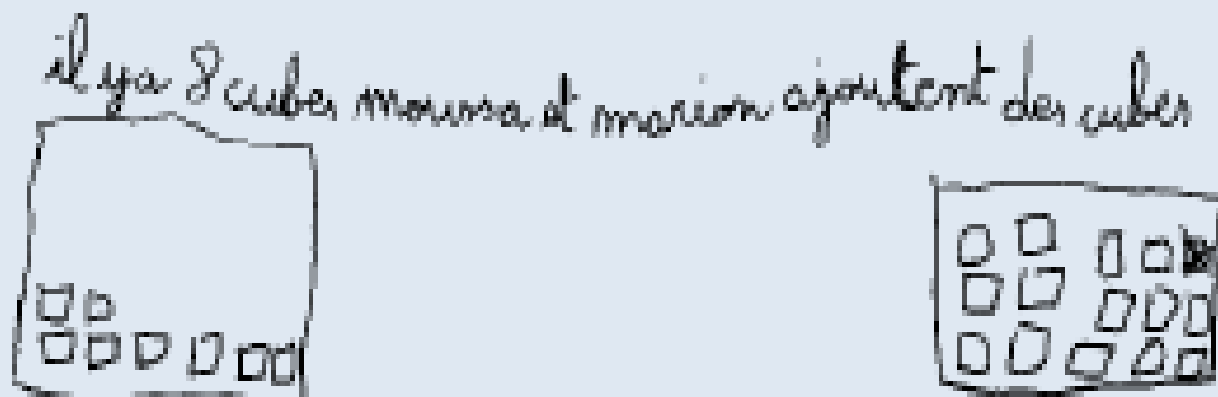
Objectif de l'enseignement de la résolution de problème : arriver progressivement à des stratégies de niveau 3 notamment à la production d'écritures mathématiques.

ÉLÈVE 1

PROBLÈME

Il y a 8 cubes dans une boîte. Moussa puis Marion ajoutent des cubes dans la boîte. Moussa en ajoute 4. Ensuite, Marion en ajoute 2.

- Combien y-a-t-il de cubes dans la boîte à la fin? 14



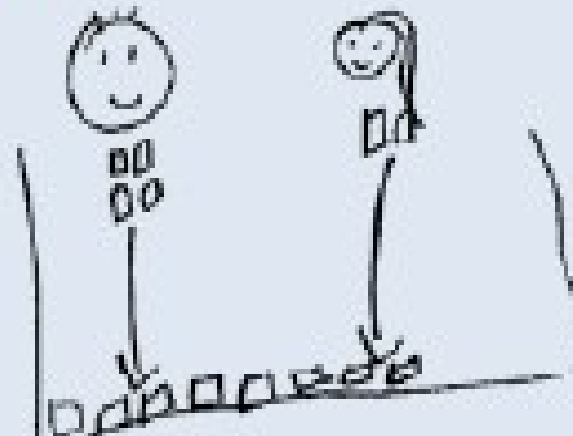
ÉLÈVE 2

PROBLÈME

Il y a 8 cubes dans une boîte. Moussa puis Marion ajoutent des cubes dans la boîte. Moussa en ajoute 4. Ensuite, Marion en ajoute 2.

- Combien y-a-t-il de cubes dans la boîte à la fin ?

$$8 + 4 + 2 = 14$$



ÉLÈVE 3

PROBLÈME

Il y a 8 cubes dans une boîte. Moussa puis Marion ajoutent des cubes dans la boîte. Moussa en ajoute 4. Ensuite, Marion en ajoute 2.

- Combien y-a-t-il de cubes dans la boîte à la fin ? 14

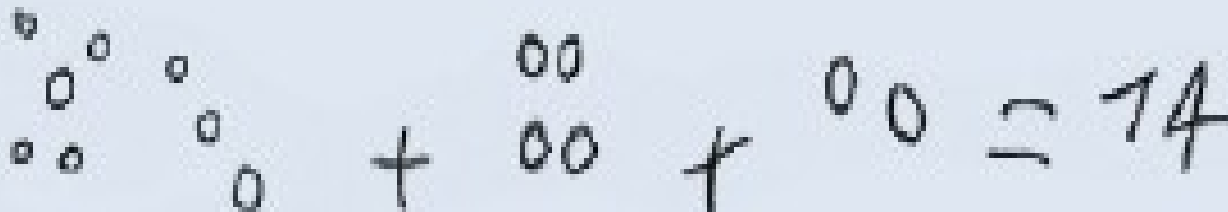


ÉLÈVE 4

PROBLÈME

Il y a 8 cubes dans une boîte. Moussa puis Marion ajoutent des cubes dans la boîte. Moussa en ajoute 4. Ensuite, Marion en ajoute 2.

- Combien y-a-t-il de cubes dans la boîte à la fin ?



The image shows a handwritten mathematical solution. On the left, there are 8 small circles representing cubes, arranged in two groups of four. This is followed by a plus sign, then two pairs of small circles representing 4 cubes, another plus sign, and then two more small circles representing 2 cubes. This is followed by an equals sign and the number 14.

$$8 + 4 + 2 = 14$$

Problèmes arithmétiques au cycle 2 : la modélisation

Modéliser

- Traduire mathématiquement la situation.
- Permet de passer à la procédure et au calcul.

C'est un processus qui rend la réalité
calculable.

Du dessin figuratif au schéma grâce au matériel : les problèmes additifs

- Pas d'enseignement d'une typologie de problèmes.
- Amener les élèves à modéliser en utilisant des schémas, des nombres et des opérations.
- Matériel à favoriser pour aborder les aspects additifs, les propriétés de décomposition des nombres ou le sens des opérations : cubes emboîtables, matériel multibase, réglettes.
- Commencer par des petits nombres pour permettre une familiarisation avec les représentations.

La modélisation par le schéma en barre

- Elle permet :
 - De faire des analogies entre les problèmes élémentaires différents.
 - Associer un seul schéma à des problèmes élémentaires différents.

Des problèmes différents : un même schéma

1. Léo et Lucie ont 43 billes à eux deux. Léo a 6 billes. Combien Lucie a-t-elle de billes ?
2. Lucie avait 43 billes ce matin. Elle a perdu 6 billes pendant la récréation. Combien a-t-elle de billes maintenant ?
3. Lucie avait 43 billes ce matin. Elle a perdu 37 billes pendant la récréation. Combien a-t-elle de billes maintenant ?
4. Lucie a gagné 6 billes à la récréation. Maintenant elle a 43 billes. Combien de billes avait-elle avant la récréation ?



Figure 32. Problème 1.

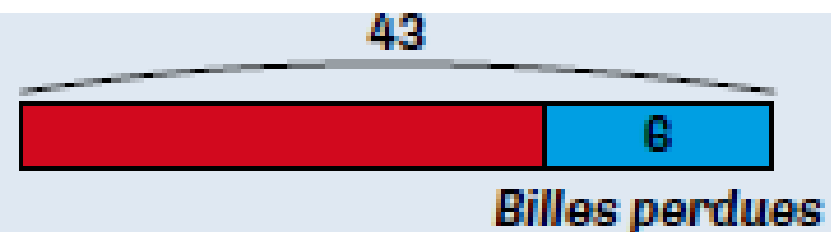
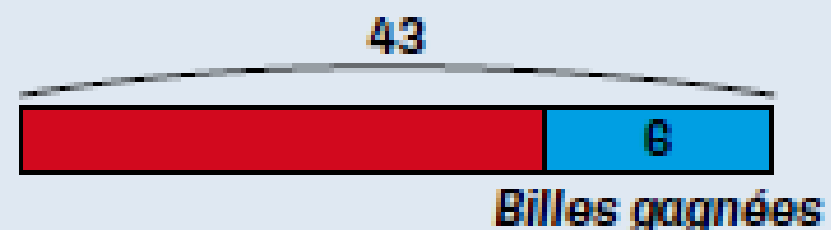


Figure 33. Problème 2.



Modéliser pour résoudre des problèmes : les schémas en barres

Problèmes de type parties-tout et modélisation pour le schéma en barres

- D'abord travailler sur des petits nombres en lien avec l'apprentissage de la numération et de l'addition.
- Partir de manipulation à partir de cubes emboîtables et progresser vers le schéma en barres.
- Les cubes, par un travail d'appropriation, permettent de progresser vers la schématisation en barres rectangulaires.

UN EXEMPLE DE PROBLÈME ET DE MODÉLISATION PROGRESSIVE

PAR LE SCHÉMA EN BARRES

→ « Léo a 7 billes rouges et 5 billes bleues. Combien Léo a-t-il de billes en tout ? »

La résolution de ce problème à l'aide de 7 cubes rouges :



et 5 cubes bleus :



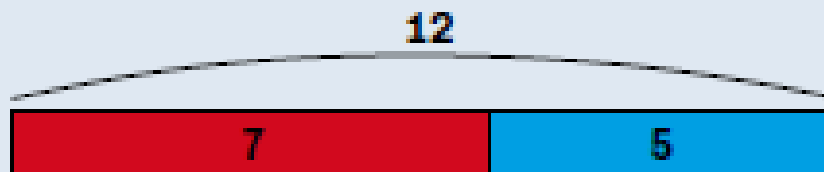
fait apparaître l'assemblage :



puis le schéma :



et enfin le schéma en barres :



Il correspond au schéma générique suivant :



Points de vigilance sur la schématisation en barres

- Introduire progressivement la modélisation par le schéma en barres en faisant référence aux situations de manipulations précédentes.
- Partir du matériel manipulé lors de la phase de recherche.
- Modélisation en barre introduite par l'enseignant lors de la mise en commun.
- Expliciter l'analogie entre les rectangles dessinés pour chaque partie et le nombre de cubes utilisés pour représenter les données numériques.
- Raconter le problème en prenant appui sur le schéma.

La schématisation en barres des problèmes multiplicatifs

- Parts égales, on cherche le tout : multiplication

Paul apporte 3 paquets de biscuits. Il y a 7 biscuits dans chaque paquet. Combien y a-t-il de biscuits en tout ?

- Valeur d'une part : partage, partition

Trois enfants se partagent 18 images. Combien d'images aura chaque enfant ?

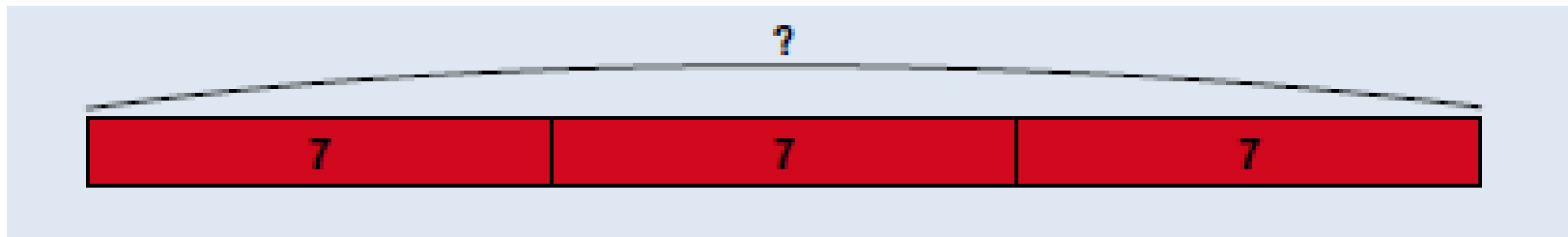
- Nombre de parts : quotition

Il y a 24 élèves dans la classe. Le professeur constitue des équipes de 4 élèves. Combien y aura-t-il d'équipes ?

La schématisation en barres des problèmes multiplicatifs

Paul apporte 3 paquets de biscuits. Il y a 7 biscuits dans chaque paquet. Combien y a-t-il de biscuits en tout ?

- En réunissant les cubes, proposer le schéma en barre suivant :



- Faire remarquer aux élèves la symétrie qui existe entre les problèmes multiplicatifs et les situations de partage.

L'importance du continuum didactique au cycle 2 et au cycle 3

Le sens des opérations et la symétrie entre les opérations

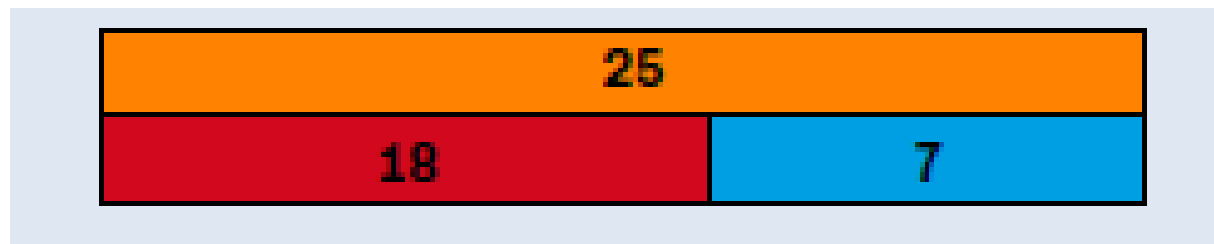
- La **symétrie** entre l'addition et la soustraction

$$25 - 8 = 17 \text{ et } 25 - 17 = 8$$

découlent de la relation additive entre ces 3 nombres.

$$18 + 7 = 25$$

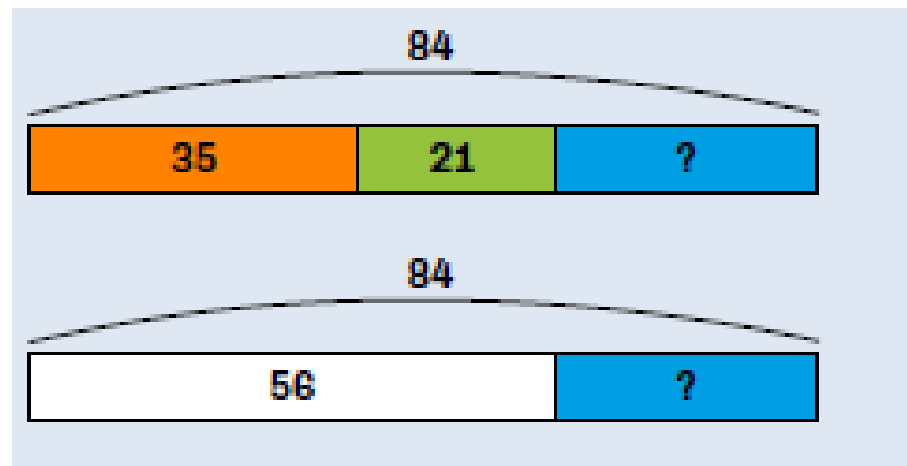
Le schéma a deux barres permet de percevoir cette relation.



La résolution de problèmes complexes

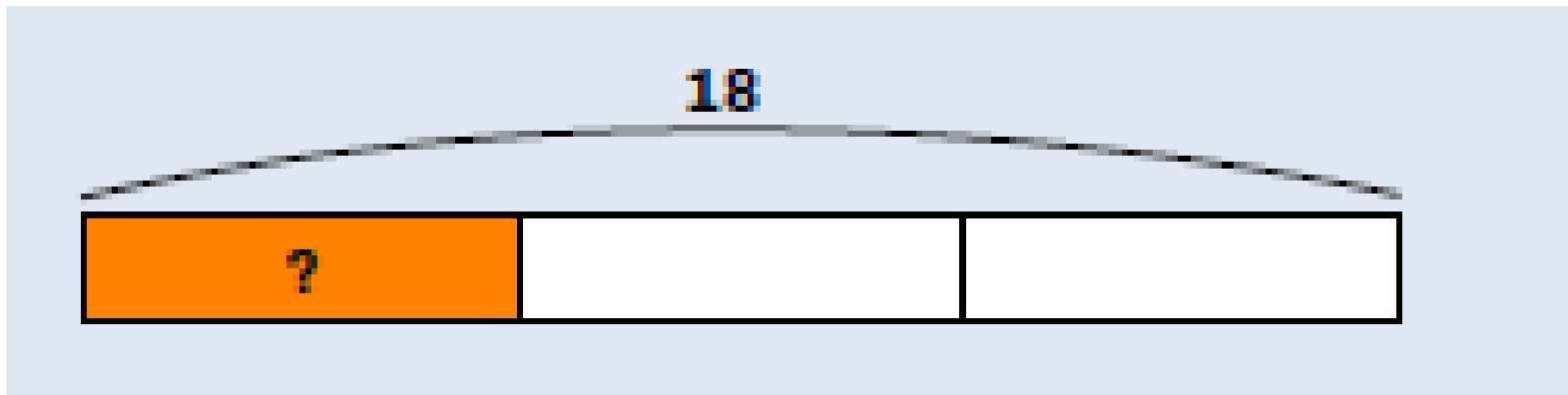
- Utiliser les schémas en barres pour résoudre des problèmes à étapes en une succession de deux problèmes basiques.

Dans la bibliothèque de classe, il y a 84 livres. Il y a 35 albums et 21 bandes dessinées. Les autres sont des livres documentaires. Combien y a-t-il de livres documentaires ?



Lien avec l'introduction ultérieure de la fraction

- *Trois enfants se partagent 18 images. Combien d'images aura chaque enfant ?*
- *Paul a 18 billes. Il en donne un tiers à Julie. Combien de billes Julie reçoit-elle ?*



Mises en œuvre en classe

Reprendre les différentes phases Manipuler, verbaliser, abstraire

- Prendre le temps de manipuler si nécessaire :
 - Du matériel tangible au matériel figuratif.
 - Introduire les cubes emboîtables.
- Représenter la situation :
 - Du dessin à la schématisation.
- Modéliser la situation mathématiquement :
 - Vers des stratégies de niveau 3 (écritures mathématiques).
 - Introduire la schématisation en barre en appui avec le matériel manipulé (les cubes emboîtables).

Reprendre les différentes phases Manipuler, verbaliser, abstraire

- Penser la place de la verbalisation de l'enseignant
 - Raconter le problème en prenant appui sur le schéma.
 - Faire des analogies avec des problèmes rencontrés antérieurement.
- Faire verbaliser les élèves : entretien d'explicitation
- Construire des affiches référentes

Merci de votre attention

Bon mercredi aprem !!!