

Mercredi 16 mars 2022

Connaître les nombres pour mieux calculer et calculer pour mieux connaître les nombres

Sophie GLAY et Céline HEDONT

Parcours de six heures

- **T1 : deux heures aujourd'hui.**
- **T2 : deux heures pour la mise en œuvre dans vos classes.**
- **T3 : deux heures en présentiel le 11 mai.**

Organisation du temps 1

- **Les différents types de calcul.**
- **Réfléchi ou posé... Le calcul ça s'enseigne.**
- **Les ressources sur le calcul**
- **Les mises en œuvre dans les classes.**

Connaître les nombres pour mieux calculer et calculer pour mieux connaître les nombres.

Le calcul... mais des calculs

Les faits numériques mémorisés

- Ce sont des résultats de faits numériques qui sont **automatiquement disponibles.**
- **Le résultat peut être donné sans être calculé.**
 - *Compléments à 10, résultats des tables d'addition, doubles, moitiés.*
 - *Tables de multiplication.*
- Ce stock de faits mémorisés augmente au fur et à mesure de la scolarité.
- Ces faits font l'objet d'un apprentissage et leur automatisation nécessite un entraînement régulier.

Le calcul réfléchi

- C'est une modalité de calcul qui s'appuie **sur les faits numériques mémorisés et la connaissance des nombres**. Il vise **l'apprentissage de stratégies de calcul**.
- Ce calcul peut s'effectuer à l'écrit. Dans ce cas, il peut être apparenté au calcul en ligne.
- **Les stratégies à apprendre sont programmées** et font l'objet d'une progression **en lien avec les faits numériques mémorisés**.
- Les stratégies **s'institutionnalisent**, s'apprennent et font l'objet de **traces écrites**.
- Les stratégies s'entraînent.
- Progressivement, le calcul réfléchi peut si la charge cognitive n'est pas trop importante s'effectuer à l'oral.

Le calcul posé

- C'est une modalité de calcul écrit qui requiert l'application d'un **algorithme opératoire**.
- Son utilisation doit être pensée. Le calcul posé est utilisé :
 - Si le calcul réfléchi est trop coûteux.
 - Si l'algorithme opératoire facilite le calcul.

A l'écrit ? A l'oral ?

- **Les faits numériques mémorisés** : Le calcul peut être écrit au départ mais très vite **la mobilisation des résultats doit être mentale.**
- **Le calcul réfléchi** : Il passe par l'écrit au départ mais, grâce à l'entraînement, le recours à l'écrit est de moins en moins utile. Attention, si plusieurs procédures sont combinées, le recours à l'écrit est nécessaire.
- **Le calcul posé** : Il est effectué **uniquement à l'écrit.**

Connaître les nombres pour mieux calculer et calculer pour mieux connaître les nombres.

**Posé ou réfléchi, le calcul ça
s'enseigne**

18x15 ? Quelles procédures possibles ?

- **Lister toutes les procédures de calcul réfléchi permettant d'effectuer de trouver rapidement le résultat de 18x15.**

5 minutes de recherche.....

18x15 ? Quelles procédures possibles ?

- Décomposition du 18

- $18 \times 15 = (10 + 8) \times 15$
 $= (10 \times 15) + (8 \times 15)$

- Connaissances activées ?

- Décompositions additives
- Multiplier par 10, double.
- Distributivité, commutativité

18x15 ? Quelles procédures possibles ?

- Décomposition du 15
 - $18 \times 15 = 18 \times (10 + 5)$
- Connaissances activées ?
 - Décompositions additives,
 - Multiplier par 10, moitiés
 - Distributivité

18x15 ? Quelles procédures possibles ?

- Raccrochage à 20 car doubler c'est facile

- $18 \times 15 = 15 \times (20 - 2)$
 $= 300 - 30$

- Connaissances activées ?

- Décompositions soustractives
 - Multiplier par 10, doubles, complément à 10
 - Distributivité

18x15 ? Quelles procédures possibles ?

- Doubles et moitiés

- $18 \times 15 = 9 \times 2 \times 15$
 $= 9 \times 30$

- Connaissances activées ?

- Décompositions multiplicatives
 - Doubles, moitiés, multiplier par 10
 - Associativité
 - Connaissance des tables

18x15 ? Quelles procédures possibles ?

- *Avec un 10, c'est facile de multiplier*

- $18 \times 15 = 9 \times 2 \times 3 \times 5$

- $= 27 \times 10$

- Connaissances activées ?

- Décompositions multiplicatives
 - Multiplier par 10
 - Commutativité, associativité
 - Connaissance des tables

Des procédures automatiques et des procédures qui s'adaptent aux nombres

P1	P2	P3	P4	P5
$18 \times 15 = (10 + 8) \times 15 = (10 \times 15) + (8 \times 15)$	$18 \times 15 = 18 \times (10 + 5)$	$18 \times 15 = (20 - 2) \times 15 = 300 - 30$	$18 \times 15 = 9 \times 2 \times 15 = 9 \times 30$	$18 \times 15 = 9 \times 2 \times 3 \times 5 = 10 \times 27$
Pas d'adaptation nécessaire		Adaptation aux nombres choisis		

Qu'est-ce que le calcul réfléchi ?

- Dans un premier temps à l'écrit, on parle alors de calcul en ligne.
- Les résultats intermédiaires et les décompositions peuvent être écrits plutôt que stockés en mémoire de travail.
- Un calcul traité en ligne pourra par la suite être traité mentalement.
- Le recours à l'écrit permet de traiter des calculs de niveau plus complexe et / ou de gérer des nombres de taille plus élevée.
- Il repose sur une les propriétés des opérations : **commutativité**, **associativité** et **distributivité** de la multiplication sur l'addition essentiellement.

Comment enseigner le calcul réfléchi ?

- **Programmer les apprentissages** en calcul réfléchi au sein du cycle et du niveau.
- **Mettre en lien programmation des faits numériques mémorisés et calcul réfléchi.**
- **Enseigner une stratégie de calcul par semaine.**

Comment enseigner le calcul réfléchi ?

- **Organiser cette séquence d'apprentissage :**
 - Une phase de recherche individuelle.
 - Une phase de mise en commun qui permet la confrontation des procédures.
 - Une mise en valeur de la procédure la plus efficace et son institutionnalisation.
 - Des phases d'entraînement.
 - Une phase d'évaluation.
- **Penser la place de l'écrit** dans la séquence : écrits de recherche, écrits référents, individuels, collectifs.

Comment enseigner le calcul posé ?

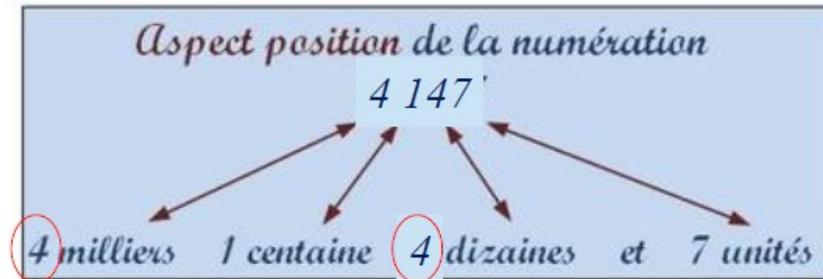
Points de VIGILANCE

- Distinguer aspect numération de position et aspect décimal
- Distinguer technique et technologie

Le calcul posé ?

Numération de position

« La valeur de chaque chiffre dépend de sa position dans le nombre »



Les milliers s'écrivent au 4^{ème} rang à partir de la droite, les centaines au 3^{ème} rang, etc.

aspect décimal

« Les différentes unités de la numération sont liées entre elles par des « relations » décimales »

Aspect décimal de la numération

10 unités d'un certain rang équivalent à une unité du rang supérieur.

1 dizaine = 10 unités,
1 centaine = 10 dizaines,
donc 1 centaine = 100 unités

1 millier = 10 centaines,
donc 1 millier = 100 dizaines
et 1 millier = 1000 unités

Le calcul posé ?

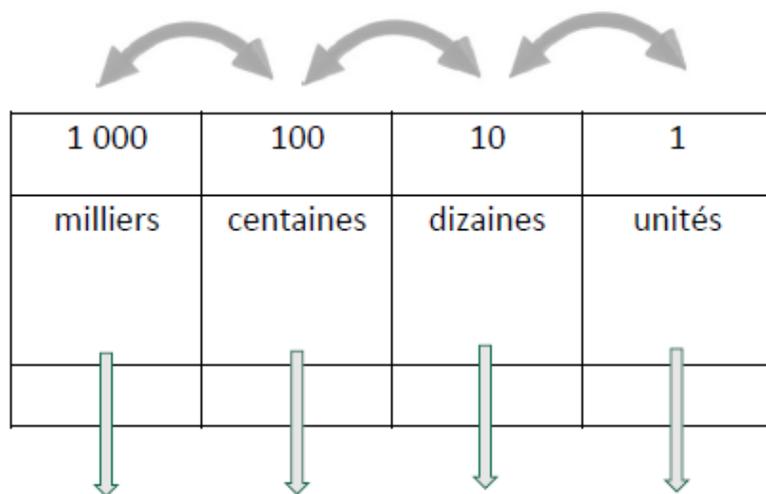
Numération
de position

≠

aspect
décimal

Objectif : Entraîner les élèves à utiliser des **unités de numération...**

ASPECT DECIMAL



ASPECT POSITION

C'est utiliser les dizaines, les centaines... comme on utiliserait le litre, le mètre...

Le calcul posé ?

**Numération
de position**

≠

**aspect
décimal**

3. Complète

a. 1 centaine + 9 dizaines + 3 unités =

b. 8 dizaines + 2 centaines + 5 unités =

c. 6 centaines + 9 unités =

d. 3 dizaines + 6 centaines =

≠

5. Complète

a. 4 centaines + 10 dizaines =

b. 5 centaines + 12 dizaines + 3 unités =

c. 21 dizaines + 3 centaines =

d. 6 centaines + 21 dizaines + 14 unités =

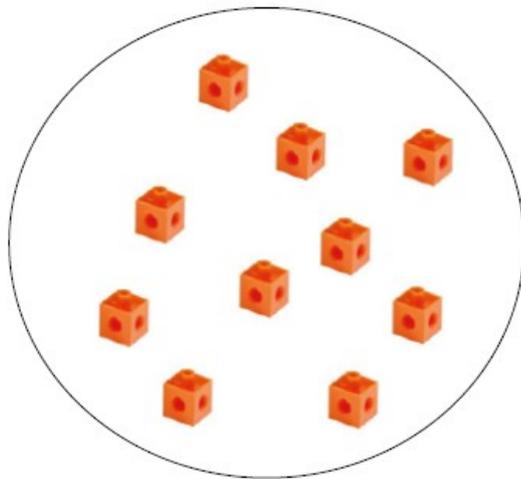
Le calcul posé ? Importance du matériel

Numération
de position

≠

aspect
décimal

Cubes emboîtables



10 cubes non emboîtés : 10 unités

10 cubes emboîtés : une dizaine



1d = 10 u

Une barre, c'est une dizaine
mais les unités restent **visibles**.

Pour « casser » une dizaine, c'est
immédiat !

Le calcul posé ? Importance du matériel

aspect décimal garanti car conversion possible

Boîtes Picbille

Inutile de compter jusqu'à 10 !

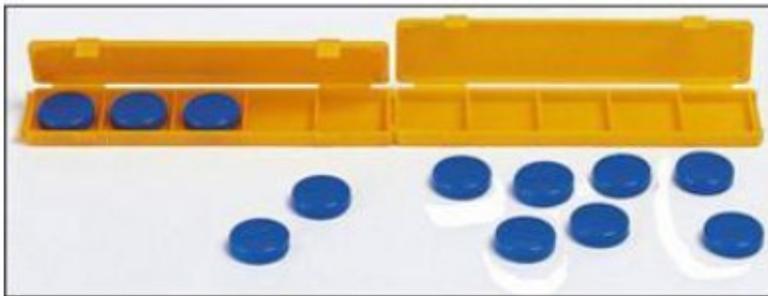


Boîte fermée : une dizaine



Boîte ouverte : dix unités

$$1d = 10 u$$



Pour « casser » une dizaine, il faut ouvrir la boîte

Lorsque la boîte est fermée, on a une dizaine et les unités **ne sont plus visibles.**

Le calcul posé ? Importance du matériel



Matériel MULTIBASE : aspect décimal garanti ?

Le calcul posé ? Importance du matériel

Matériel Multibase



Unités, dizaines et centaines

$1d = 10 u$; $1c = 10 d$; $1c = 100 u$

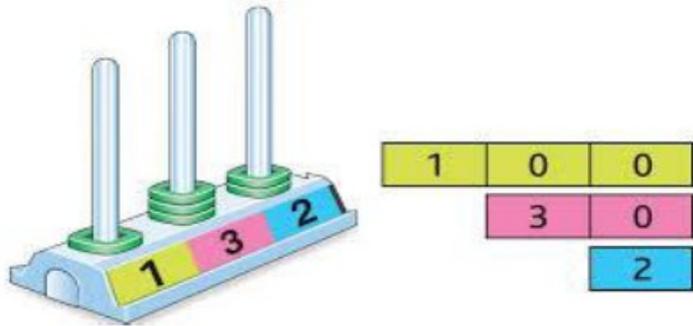
Les 10 unités nécessaires pour faire une dizaine sont **visibles**.
Les 10 dizaines nécessaires pour faire une centaine sont **visibles**.

On ne peut pas « casser » les centaines,
on ne peut pas « casser » les dizaines.

NECESSITE DE FAIRE DES
ECHANGES !

Le calcul posé ? Importance du matériel

Abaque



Unités, dizaines et centaines

$1d = 10 u$; $1c = 10 d$; $1c = 100 u$

On ne voit pas les unités contenus dans une dizaine, on ne voit pas les dizaines contenus dans une centaine.

On ne peut pas « casser » les centaines, on ne peut pas « casser » les dizaines.

NECESSITE DE FAIRE
DES ECHANGES AVEC DES
ANNEAUX QUI ONT TOUS LA MÊME
TAILLE !

Quel est l'avantage des abaques ?

Abstraction plus grande

→ utilisation de l'aspect décimal plus important et donc des unités de numération

→ permettre aux élèves d'oublier les paquets de 10 pour parler de dizaines

Qu'est-ce que le calcul posé ?

Tâche, technique, technologie

- La **TACHE** : effectuer l'opération posée...
- Pour chaque technique opératoire, distinguer :
 - **Comment** on fait ? **TECHNIQUE**
(c'est-à-dire, la suite des actions à effectuer pour obtenir le résultat de l'opération)
 - **Pourquoi** ça marche ? **TECHNOLOGIE**
(c'est-à-dire, ce qui du point de vue des mathématiques, justifie la suite des actions à effectuer)

Yves Chevallard : (tâche, technique, technologie, théorie)

Le technique va reposer sur une technologie

COMMENT

→

POURQUOI

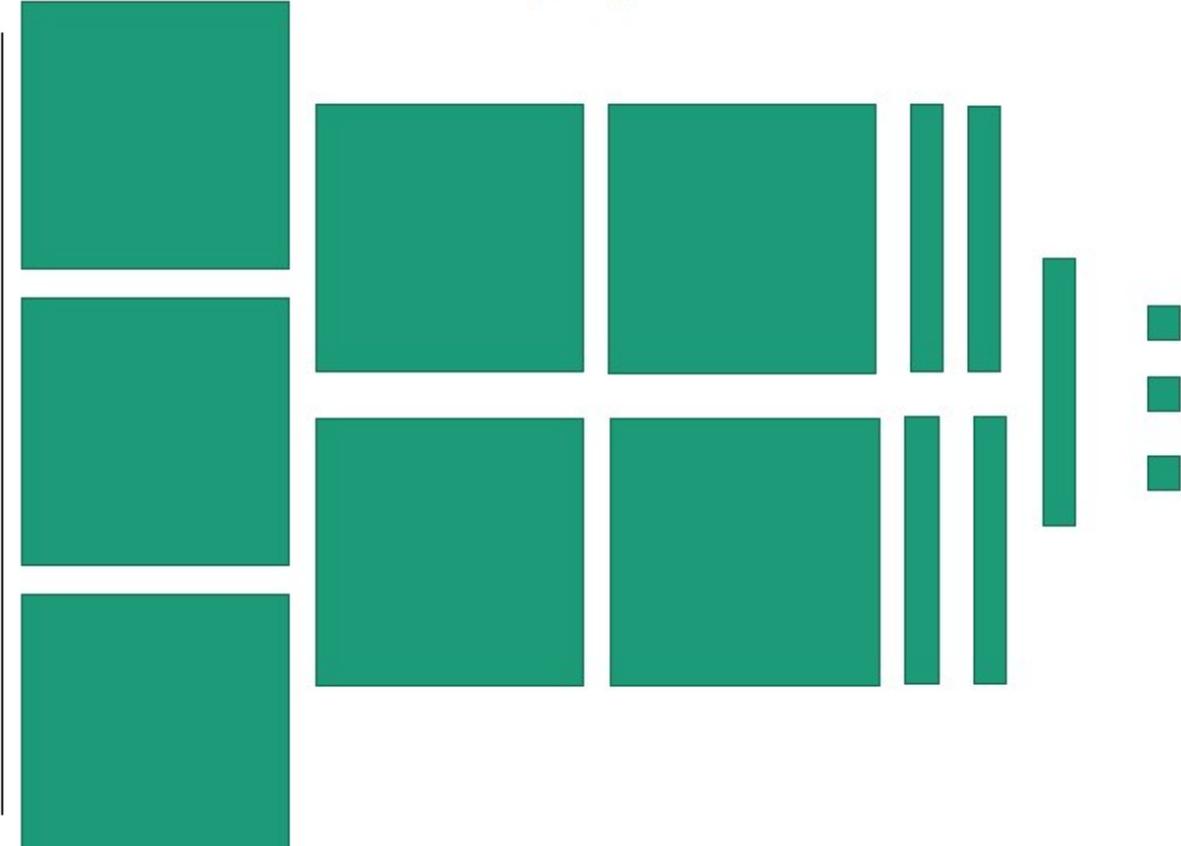
Exemple CE1 : soustraction par cassage

TECHNIQUE PAR « CASSAGE »

Comment on fait ?

$$\begin{array}{r} 753 \\ - 85 \\ \hline \end{array}$$

Pourquoi ça marche ?



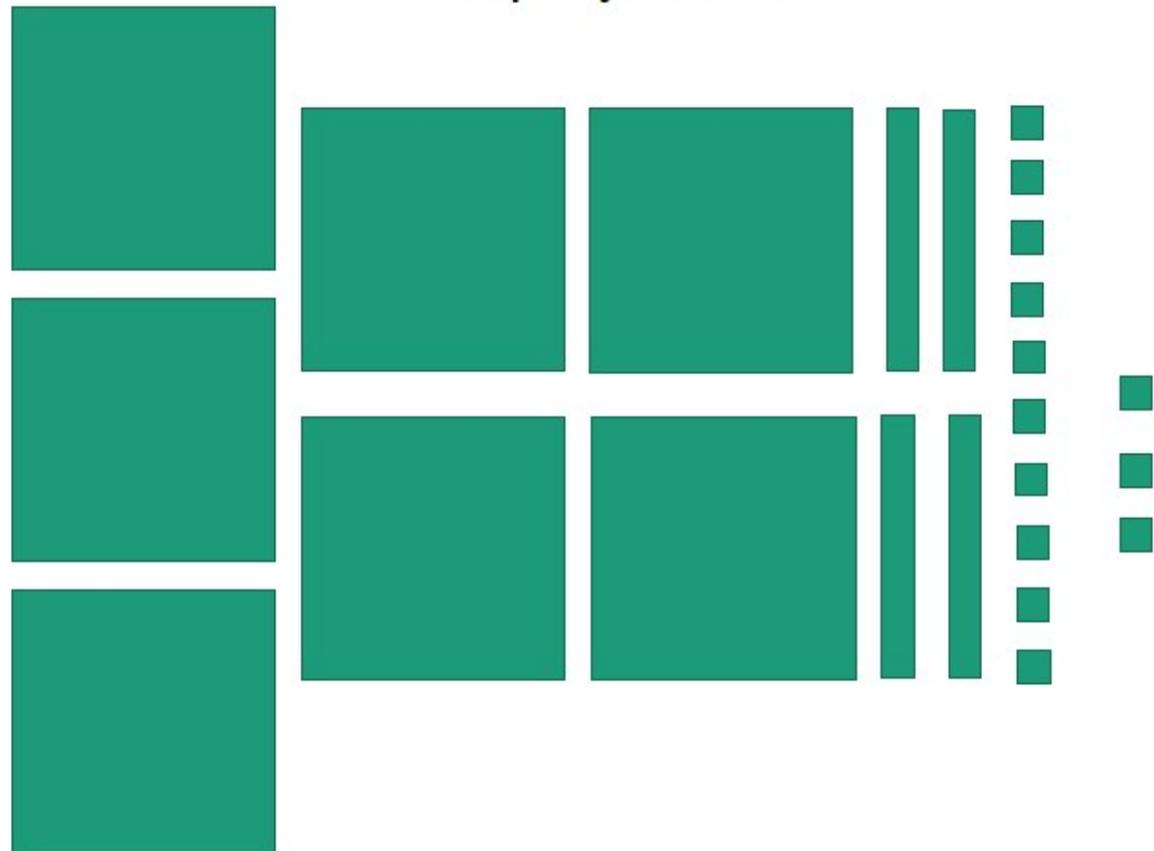
Exemple CE1 : soustraction par cassage

TECHNIQUE PAR « CASSAGE »

Comment on fait ?

$$\begin{array}{r} 4 \\ 75_1 3 \\ - 85 \\ \hline \end{array}$$

Pourquoi ça marche ?



Exemple CE1 : soustraction par cassage

TECHNIQUE PAR « CASSAGE »

Comment on fait ?

$$\begin{array}{r} 4 \\ 75_1 3 \\ - 85 \\ \hline 8 \end{array}$$

Pourquoi ça marche ?



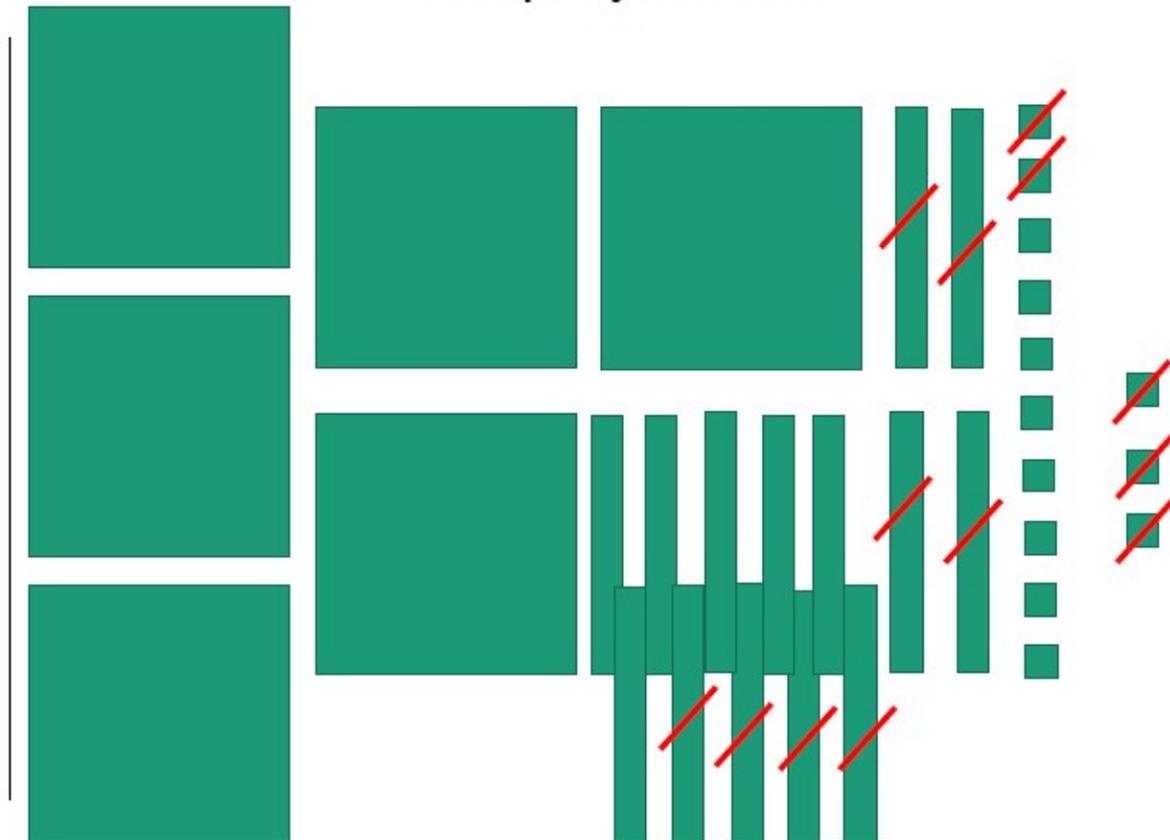
Exemple CE1 : soustraction par cassage

TECHNIQUE PAR « CASSAGE »

Comment on fait ?

$$\begin{array}{r} 6 \quad 14 \\ \cancel{7}5_13 \\ - 85 \\ \hline 668 \end{array}$$

Pourquoi ça marche ?



Exemple CE1 : soustraction par cassage

Rédiger les « mots pour le dire »

Il faut soustraire 85 à 753.

Je dois retirer 8 dizaines et 5 unités à 7 centaines, 5 dizaines et 3 unités.

Enlever 3 unités à 5 unités : pas possible (sauf partir dans le négatif).

Je casse donc une dizaine parmi les 5 dizaines et j'obtiens donc 10 unités donc 13 unités en tout (mais, je n'ai plus que 4 dizaines) ; $13 - 5 = 8$ unités ;

~~4 dizaines~~ ~~— 8 dizaines~~ Enlever 8 dizaines à 4 dizaines, ce n'est pas possible

Je casse donc une centaine parmi les 7 centaines et j'obtiens donc 10 dizaines donc 14 dizaines en tout (mais, je n'ai plus que 6 centaines). $14 - 8 = 6$ dizaines (ou $74 d - 8 d$) ; $6 c - 0 = 6$; résultat 6 c 6 d 8 u donc 668.

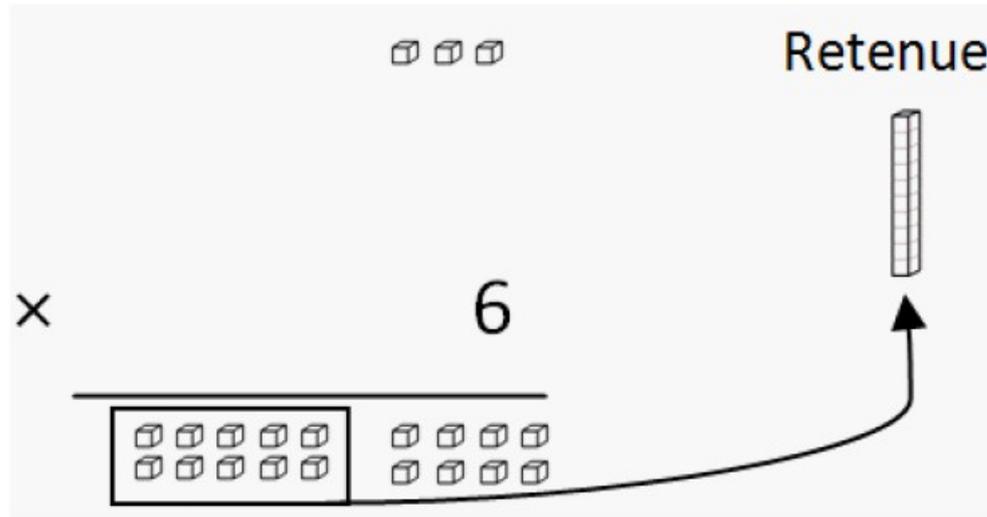
Exemple Multiplication

MULTIPLICATION

Comment on fait ?

$$\begin{array}{r} 543 \\ \times 6 \\ \hline 3258 \end{array}$$

Pourquoi ça marche ?



Exemple Multiplication

MULTIPLICATION

Comment on fait ?

$$\begin{array}{r} 543 \\ \times 6 \\ \hline 3258 \end{array}$$

Pourquoi ça marche ?

RECOURS AUX UNITÉS DE NUMÉRATION

$$\begin{array}{r} 543 \\ \times 6 \\ \hline 3258 \end{array}$$

$6 \times 3u = 18u = 1d + 8u$

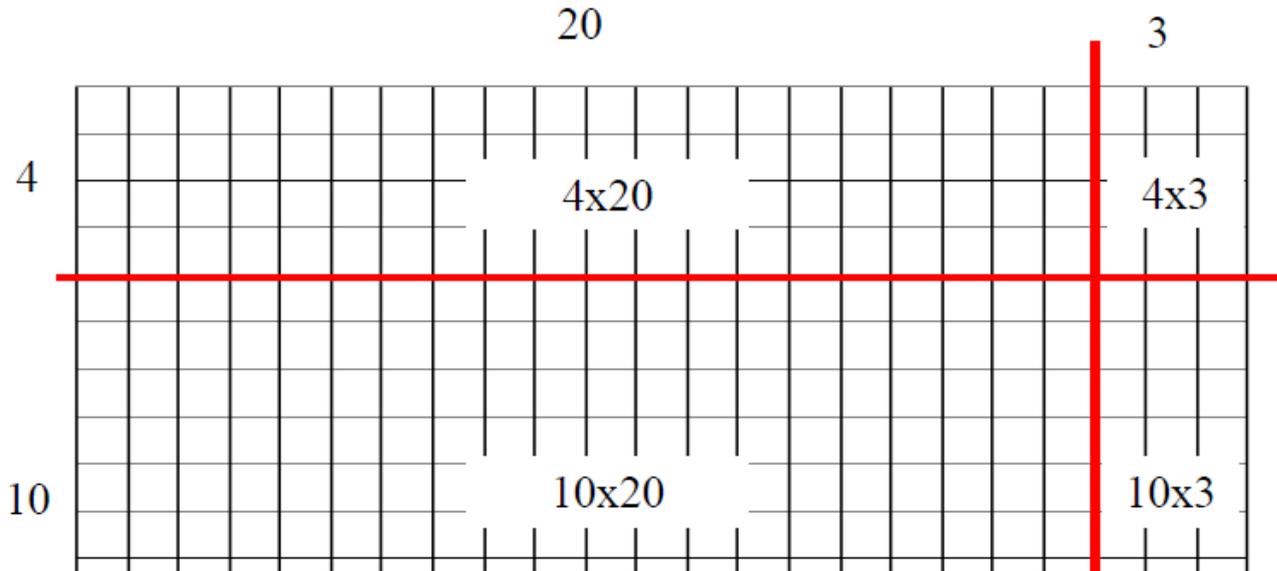
$6 \times 4d + 1d = 25d = 2c + 5d$

$6 \times 5c + 2c = 32c = 3m + 2c$

MAIS AUSSI...

Multiplication à 2 chiffres

MULTIPLICATION



Le nombre total de petits carrés est égal à la somme du nombre de petits carrés ici, là, là et encore là.

$$23 \times 14 = (20+3) \times (10+4) = (20 \times 10) + (20 \times 4) + (3 \times 10) + (3 \times 4)$$

DISTRIBUTIVITE

Multiplication posée à 2 chiffres

Exemple sur la multiplication posée CE2

Lumni 15 juin (de 4min à 12 min):

<https://www.lumni.fr/video/revision-des-tables-de-multiplication-et-problemes-sur-les-durees-15-juin>

Multiplication posée à 2 chiffres

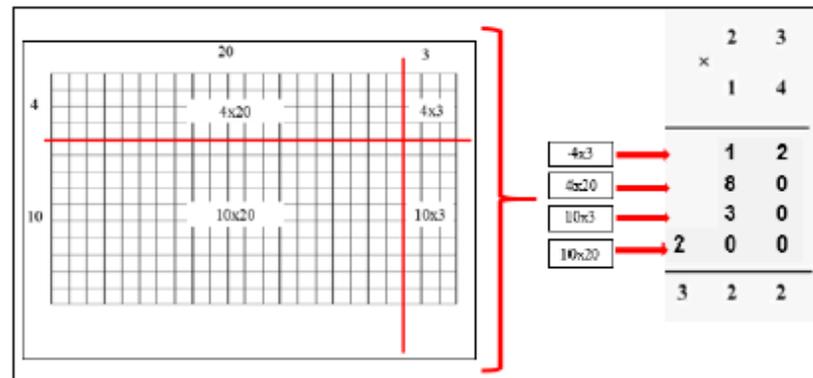
Rédiger les « mots pour le dire »

Réaliser l'opération 23×4 , puis 23×10

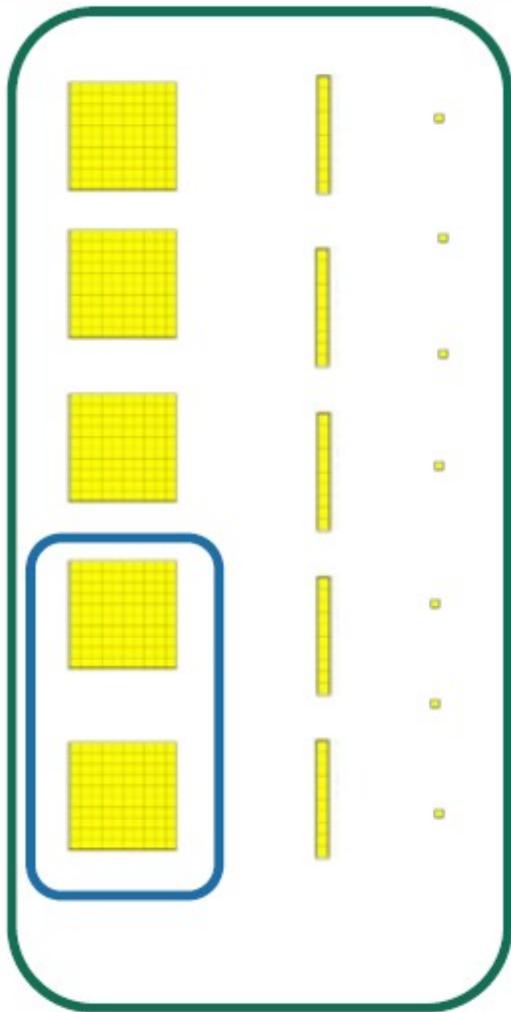
La première se décompose en 3×4 puis 20×4 , la seconde 23×1 dizaine (ajout du 0 à la deuxième ligne)

Donner du sens aux calculs intermédiaires. Recours aux unités de numération.

Par exemple, 4 « fois » 20 ou 4 « fois » 2 dizaines, cela fait 8 dizaines.



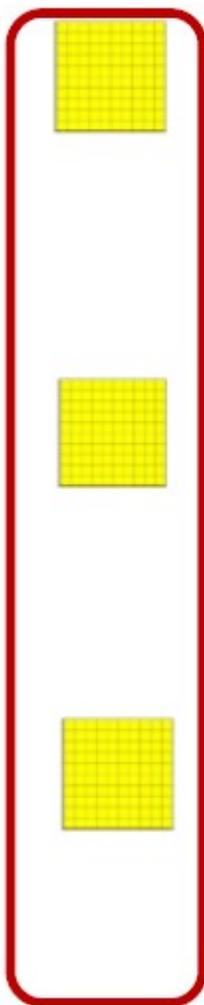
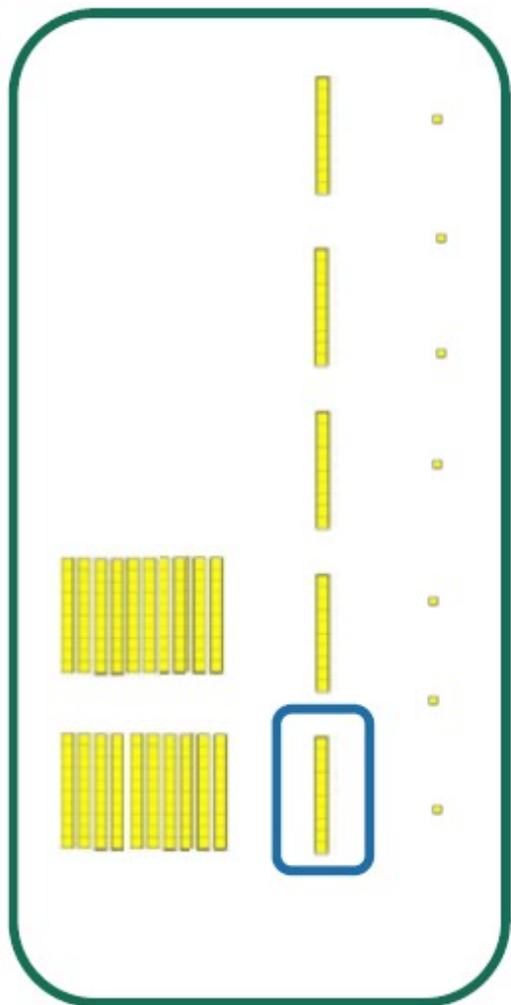
La division



En 5, combien de fois 3, il y va 1 fois et il en reste 2.

c	d	u	
5	5	7	3
<input type="text"/>			<input type="text"/>

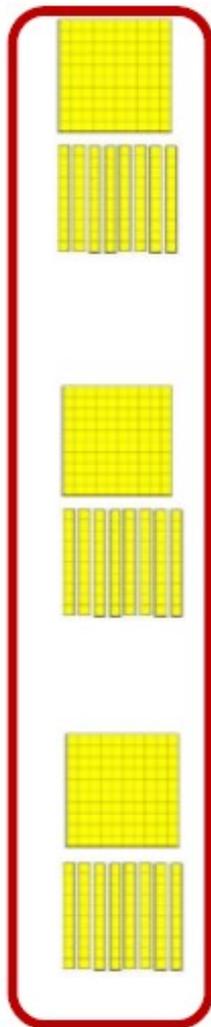
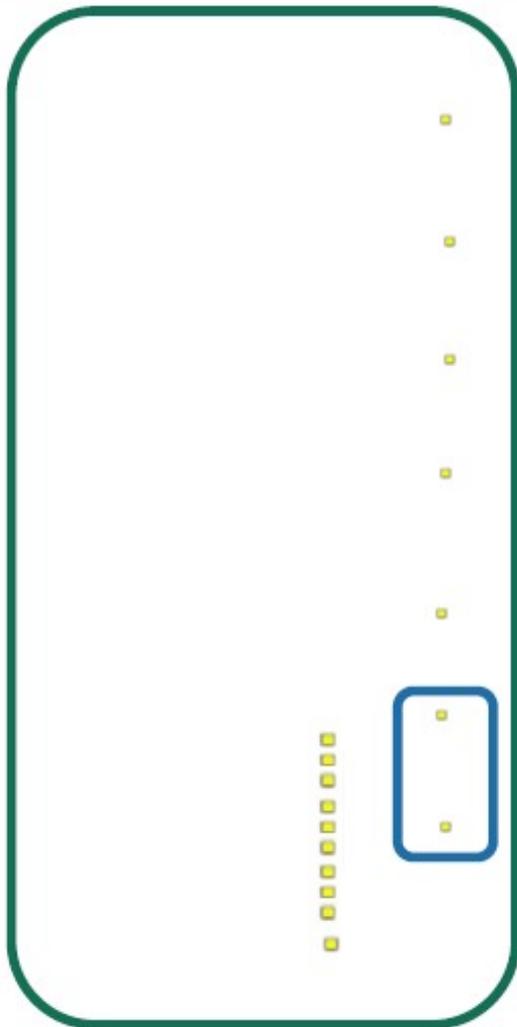
La division



En 25, combien de fois 3, il y va 8 fois et il en reste 1.

c	d	u	
5	5	7	3
2	5		
	<input type="text"/>		
			1
			c

La division



c	d	u
5	5	7
2	5	
	1	7
		2

$$\begin{array}{r}
 3 \\
 \hline
 185 \\
 \text{c} \quad \text{d} \quad \text{u}
 \end{array}$$

En 17, combien de fois 3, il y va 5 fois et il en reste 2.

La division

Rédiger les « mots pour le dire »

Il faut partager 557 pièces d'or entre 3 pirates. D'abord, on partage les 5 centaines. On donne une centaine à chaque pirate. Il nous reste donc 2 centaines. Dans le quotient, nous écrivons 1 centaine, c'est le nombre de centaines que nous avons donné à chaque pirate. Puis, on écrit qu'il reste 2 centaines et on descend les 5 dizaines. Nous transformons les 2 centaines en 20 dizaines. Nous avons donc 25 dizaines au total, à partager entre les 3 pirates. On donne 8 dizaines à chaque pirate. Il reste une dizaine que nous ne pouvons pas distribuer. On écrit 8 dans le quotient car c'est le nombre de dizaines qu'on a donné à chacun. On transforme alors la dizaine qu'il reste en 10 unités. Nous avons maintenant 17 unités à partager équitablement entre nos 3 pirates. On donne donc 5 unités à chacun des pirates. On écrit alors 5 dans le quotient et il nous reste 2 pièces qui ne peuvent pas être distribuées.

Connaître les nombres pour mieux calculer et calculer pour mieux connaître les nombres.

Les ressources

Le calcul aux cycles 2 et 3

Introduction

Aux cycles 2 et 3, les calculs sont menés sous différentes formes (calcul mental, calcul en ligne, calcul posé, calcul instrumenté) souvent utilisées en interaction et complémentaires les unes des autres. Le temps consacré à l'apprentissage de chacune de ces formes de calcul permet d'acquiescer les savoirs de fin de cycles dans le champ « nombres et calcul ». Si la pratique des différentes formes de calcul se mené dans le cadre de la résolution de problèmes, les connaissances liées, en termes de capacités techniques et de procédures, ne peuvent s'acquiescer, notamment pour le calcul mental et le calcul en ligne, qu'en y consacrant des temps spécifiques quotidiens, comprenant des applications orales précises et d'institutionnalisations écrites notées dans les cahiers des élèves.

Calcul mental

Le calcul mental est une modalité de calcul sans recours à l'écrit et ce n'est, le plus souvent, pour l'énoncé proposé par l'enseignant et la réponse fournie par l'élève. Il n'est pas écrit ou plus que la correction, elle, soit écrite pour être discutée de façon collective.

Calcul en ligne

Le calcul en ligne est une modalité de calcul écrit ou partiellement écrit. Il se distingue à la fois :

- du calcul mental, en donnant la possibilité à chaque élève, s'il en ressent le besoin, d'écrire des étapes de calcul immédiates qui seraient trop lourdes à garder en mémoire ;
- du calcul posé, dans le sens où il ne consiste pas en la mise en œuvre d'un algorithme, c'est-à-dire d'une succession d'étapes utilisées tout le temps dans le même ordre et de la même manière indépendamment des nombres en jeu.

L'énoncé est donné par le professeur à l'oral ou à l'écrit ; le résultat est donné par l'élève à l'écrit.

Le calcul en ligne est travaillé, d'une part en complément du calcul mental, pour faciliter l'apprentissage des démarches et la mémorisation des propriétés des nombres et des opérations, et d'autre part pour permettre d'effectuer, sans recours à un algorithme de calcul posé, des calculs trop complexes pour être intégralement traités mentalement. Par exemple : $58 + 37 = 58 + 30 = 88 - 3 = 85$, ou $12 = 62 = 128 + 124 = 744$.

Calcul posé

Le calcul posé est une modalité de calcul écrit consistant à l'application d'un algorithme opératoire (par exemple calcul de la multiplication entre nombres décimaux).

Calcul instrumenté

Le calcul instrumenté est un calcul effectué à l'aide d'un ou plusieurs instruments, appareils, ou logiciels (abaque, boulier, calculatrice, tableur, etc.).

Retrouvez également :



éduscol.education.fr/ressources-2#16 - Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche - Mars 2016

1

Le calcul en ligne au cycle 2

Introduction

La ressource « le calcul aux cycles 2 et 3 » (à venir), explicite de façon synthétique les objectifs et stratégies d'enseignement des différentes formes de calcul travaillées sur ces deux cycles. La présente ressource apporte des éclairages plus précis sur le calcul en ligne dont la pratique est attendue aux cycles 2 et 3, conformément aux programmes parus au [Bulletin officiel spécial n°11 du 26 novembre 2015](#).

Qu'est-ce que le calcul en ligne ?

Le calcul en ligne est une modalité de calcul écrit ou partiellement écrit.

Il se distingue à la fois :

- du calcul mental, en donnant la possibilité à chaque élève, s'il en ressent le besoin, d'écrire des étapes de calcul immédiates qui seraient trop lourdes à garder en mémoire ;
- du calcul posé, dans le sens où il ne consiste pas en la mise en œuvre d'un algorithme indépendant des nombres en jeu.

L'énoncé est donné par le professeur à l'oral ou à l'écrit ; le résultat est donné par l'élève à l'écrit.

Le calcul mental et le calcul en ligne vivent indépendamment mais se nourrissent mutuellement :

- les habiletés développées en calcul mental servent au service du calcul en ligne, elles donnent progressivement accès au traitement en ligne de calculs de plus en plus complexes ;
- le calcul en ligne peut aussi être vu comme une étape dans le développement du calcul mental ; le fait d'écrire certaines étapes de calcul permet en effet de libérer la mémoire de travail, favorisant ainsi l'entrée dans le calcul mental pour tous les élèves. Le calcul en ligne ne se limite toutefois pas à cette conception, certains calculs proposés en ligne ne peuvent en effet pas être gérés de façon purement mentale.

Le calcul en ligne n'est pas une autre manière d'écrire un calcul posé. Le calcul posé repose sur une technique, un algorithme. Le calcul en ligne repose sur la compréhension de la notion de nombre, du principe de la numération décimale de position et des propriétés des opérations.

Comme le calcul mental, le calcul en ligne permet à l'élève d'utiliser la richesse de ses connaissances sur le nombre et sur les propriétés des opérations. L'élève est ainsi amené à « faire parler » les nombres, c'est-à-dire à en envisager diverses écritures, des décompositions additives, multiplicatives ou utilisant les unités de numération.

Retrouvez également :



éduscol.education.fr/ressources-2016 - Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche - Mars 2016

1

Connaître les nombres pour mieux calculer et calculer pour mieux connaître les nombres.

Les mises en œuvre dans les classes

Mettre en œuvre une séquence en classe

- Au choix en calcul réfléchi ou en calcul posé.
- Prendre appui sur les ressources communiquées.
- Prendre appui sur les préconisations données.
- Au fur et à mesure de la mise en œuvre, collecter
 - Des traces de la préparation de la séquence : fiche de séquence, fiche de préparation.
 - Des traces des recherches des élèves.
 - Des traces de la mise en commun.
 - Des traces de l'institutionnalisation (traces écrites dans les outils des élèves).